

6.1. Matrizenrechnung

6.1.1. Matrizen und Vektoren

Definition

Eine Tabelle in der Darstellung $\mathbf{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt **m,n-Matrix**

mit den **Zeilenvektoren**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und den **Spaltenvektoren** $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Matrizen werden mit **großen** Buchstaben **A, B, C, D, E**, u.s.w. bezeichnet.

Vertauscht man in einer (m,n)-Matrix **A** die Zeilen mit den Spalten, so erhält man die **transponierte Matrix** \mathbf{A}^T vom Format (n,m).

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Definition

- (m,1)-Matrizen heißen **Spaltenvektoren** und werden mit **kleinen Buchstaben und Pfeilen** $\overset{!}{a}, \overset{!}{b}, \overset{!}{c}$, u.s.w. bezeichnet.
- (1,n)-Matrizen heißen **Zeilenvektoren** und werden als **transponierte Spaltenvektoren** $\overset{!}{a}^T, \overset{!}{b}^T, \overset{!}{c}^T$, u.s.w. geschrieben.
- In der Physik dienen **Vektoren** zur Darstellung **gerichteter Größen** wie z.B. Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Impuls. **vehere** (lat.) = fahren, befördern, vgl. **Vehikel**

Beispiel: $\overset{!}{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \overset{!}{a}^T = 1 \ 4$

Übungen: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1(Transponieren)

Eine Matrix $\mathbf{A}_{(n,n)}$, bei der Spaltenzahl und Zeilenzahl übereinstimmen, nennt man **quadratische Matrix**. Die Spaltenzahl n heißt dann auch **Ordnung** der Matrix. Die **Hauptdiagonale** einer quadratischen Matrix verbindet die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Beispiel: $\mathbf{A}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Eine quadratische Matrix heißt **obere (untere) Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen Null sind.

Beispiel:
$$\mathbf{B}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind.

Beispiel
$$\mathbf{C}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle Eins sind, heißt **Einheitsmatrix** und wird mit $\mathbf{E}_{(n,n)}$ bezeichnet.

Beispiel:
$$\mathbf{E}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, deren Elemente alle Null sind, heißt **Nullmatrix** und wird mit $0_{(n,m)}$ bezeichnet.

Beispiel:
$$0_{(2,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.1.2. Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Beispiel: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 a) und b)

Lösung von Aufgabe 1 b)

Um die Verteilung von Rohstoffen von jeweils 1 ME Endprodukte auf jeweils 2 ME umzurechnen, **multipliziert** man die Verflechtungsmatrix B mit 2 und erhält

$$2 \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 & 0 \\ 100 & 10 & 20 & 0 \\ 20 & 40 & 20 & 180 \end{pmatrix}.$$

Man **multipliziert** eine Matrix A mit einer **reellen Zahl** r, indem man alle Elemente von A einzeln mit r multipliziert.

Die Multiplikation mit einer reellen Zahl ist **kommutativ**: Für eine reelle Zahl r und eine Matrix A gilt $r \cdot A = A \cdot r$

Übung: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 2

6.1.3. Addition zweier Matrizen

Beispiel: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 c)

Lösung von Aufgabe 1 c)

Um die Zahl der benötigten Zwischenprodukte vor und nach der Produktumstellung miteinander vergleichen zu können, **subtrahiert** man die beiden Matrizen **elementweise** voneinander und erhält die Differenzmatrix D :

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}' - \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 45 & 5 & 9 & 2 \\ 10 & 25 & 9 & 70 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-5 & 5-5 & 3-2 & 1-0 \\ 45-50 & 5-5 & 9-10 & 2-0 \\ 10-10 & 25-20 & 9-10 & 70-90 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & -20 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zwei Matrizen **gleichen Formats** werden **elementweise** addiert. Die Matrizenaddition ist **kommutativ**: Für zwei Matrizen A und A gleichen Formats gilt $A + A = B = A$.

6.1.4. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Beispiel: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 d)

Lösung zu Aufgabe 1 d)

Die benötigte Menge z_1 ergibt sich, wenn man die zu produzierenden Mengen (= Elemente des Produktionsvektors \vec{p}) einzeln mit den Bedarfsmengen (= Elemente des 1. Zeilenvektors von B) **multipliziert** und anschließend **addiert**:

$$z_1 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 10 = 41 \text{ ME.}$$

Entsprechend ergeben sich die Bedarfsmengen z_2 und z_3 durch **Multiplikation** des **Produktionsvektors** \vec{p} mit den beiden übrigen **Zeilenvektoren** der Matrix B:

$$\text{Zwischenprodukte} \quad \vec{z} = B * \vec{p}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \end{array} \right. \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 10 \\ 50 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 0 \cdot 10 \\ 10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 90 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 290 \\ 1020 \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} 41 \\ 290 \\ 1020 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es werden also $z_1 = 41$ ME Zwischenprodukt 1, $z_2 = 290$ ME Zwischenprodukt 2 und $z_3 = 1020$ ME Zwischenprodukt 3 für die Realisierung dieses Auftrages benötigt.

- **Multiplikation eines Zeilenvektors von links mit einem Spaltenvektor**
Man multipliziert einen m-dimensionalen Zeilenvektor \vec{a}^T **von links** mit einem m-dimensionalen Spaltenvektor \vec{b} , indem man jeweils das i-te Element von \vec{a}^T mit dem i-ten Element von \vec{b} multipliziert und anschließend die Summe bildet.
- **Multiplikation einer Matrix von links mit einem Spaltenvektor**
Man multipliziert eine (1,m)-Matrix A **von links** mit einem m-dimensionalen Spaltenvektor \vec{b} , indem man nacheinander alle Zeilenvektoren von A mit dem Spaltenvektor \vec{b} multipliziert und die Ergebnisse in Form eines 1-dimensionalen Spaltenvektors untereinander schreibt.
- **Achtung:**
die Multiplikation ist nur möglich, wenn die **Spaltenzahl** des linken Faktors mit der **Zeilenzahl** des rechten Faktors übereinstimmt!

Übungen: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 e) und Nr. 2
Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 3

6.1.5. Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise

Beispiel: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 f)

Lösung zu Aufgabe 1 f)

Der gegebene Zwischenproduktvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 204 \\ 340 \\ 850 \end{pmatrix}$ wird in die Verflechtungsgleichung eingesetzt:

$$\begin{matrix}
 & \mathbf{B} & * & \vec{p} & = & \vec{z} \\
 \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} & & * & \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 204 \\ 340 \\ 850 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

In diesem Fall muss die Verflechtungsgleichung erst nach \vec{p} aufgelöst werden. Dafür formuliert man die Matrixgleichung wieder als **LGS** und wendet das **Diagonalverfahren (siehe 1.4.1.)** an:

$$\left| \begin{array}{cccc} 5p_1 + & 5p_2 + & 2p_3 & & = & 204 \\ 50p_1 + & 5p_2 + & 10p_3 & & = & 340 \\ 10p_1 + & 20p_2 + & 10p_3 + & 90p_4 & = & 850 \end{array} \right|$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 0 & 204 \\ 50 & 5 & 10 & 0 & 340 \\ 10 & 20 & 10 & 90 & 850 \end{array} \right)$$

*
*
*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 0 & 204 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 340 \\ 0 & 0 & 17 & 405 & 289 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem besteht aus 3 Gleichungen für 4 Variablen, so dass es nicht gelingt, alle Variablen bis auf eine zu eliminieren: In jeder Gleichung bleiben mindestens zwei Variablen übrig. Es handelt sich um ein **unterbestimmtes** Gleichungssystem mit **unendlich vielen Lösungen**, die von einer willkürlich als **Parameter** ausgewählten Variablen abhängen. Bestimmt man $p_4 = t$ als frei wählbaren Parameter ($t \in \mathbb{R}$), so lassen sich p_3 ,

p_2 und p_1 in Abhängigkeit von t berechnen und man erhält $\vec{p}_t = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{17}t \\ 34 + \frac{90}{17}t \\ 17 - \frac{405}{17}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -9 \\ 90 \\ -405 \\ 17 \end{pmatrix}$ mit t

$\in \mathbb{R}$. Da nur **positive ganzzahlige** Produktionszahlen realisierbar sind bleibt nur eine einzige Lösung, nämlich

für $t = 0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$. **Probe:** $B * \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 340 \\ 850 \end{pmatrix}$.

Antwort: Der Lagerbestand lässt sich restlos aufbrauchen, wenn 34 ME E_2 und 17 ME E_3 produziert werden.

Übungen: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 3

6.1.6. Multiplikation zweier Matrizen

Beispiel: Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 1 g)

Lösung zu Aufgabe 1 g)

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B haben also die folgende Gestalt:

	Z_1	Z_2	Z_3		E_1	E_2	E_3	E_4
R_1	0,2	0	0,3		5	5	2	0
R_2	1,2	1	0,5		50	5	10	0
					10	20	10	90

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix ist dann

	E_1	E_2	E_3	E_4
R_1	4	7		
R_2	61	21		

Die für die Herstellung von 1 ME E_1 benötigte Menge an Rohstoff 1 beträgt nach dem Diagramm

$$r_1 = 0,2 \cdot \mathbf{5} + 0 \cdot \mathbf{50} + 0,3 \cdot \mathbf{10} = 4 \text{ ME}$$

Aus den Tabellen erhält man diesen Ausdruck durch **Multiplikation** des zu E_1 gehörenden **Spaltenvektors** mit dem zu R_1 gehörenden **Zeilenvektor**.

Für den Bedarf r_2 multipliziert man den gleichen zu E_1 gehörenden Spaltenvektor mit dem zu R_2 gehörenden Zeilenvektor und erhält

$$r_2 = 1,2 \cdot \mathbf{5} + 1 \cdot \mathbf{50} + 0,5 \cdot \mathbf{10} = 61 \text{ ME}$$

Der Spaltenvektor für E_1 in der Matrix C entsteht also durch Multiplikation des Spaltenvektors für E_1 der Matrix A mit der kompletten Matrix B .

Entsprechend erhält man den Spaltenvektor für E_2 in der Matrix C durch Multiplikation des Spaltenvektors für E_2 in der Tabelle A mit der kompletten Matrix B :

$$\begin{aligned} 0,2 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 0,3 \cdot 20 &= 7 \\ 1,2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 0,5 \cdot 20 &= 21 \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art erhält man die Spaltenvektoren bzw. Bestelllisten für E_3 und E_4 . Die Rechnung lässt sich übersichtlicher in **Matrizenschreibweise** darstellen:

Gegeben sind die **Input-Output-Matrizen**

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 1,2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} \quad \text{für die Verhältnisse}$$

Rohstoffe-Zwischenprodukte und Zwischenprodukte-Endprodukte.

Die gesuchte Matrix C für das Verhältnis Rohstoffe-Endprodukte erhält man durch **Multiplikation** der Matrizen A und B:

$$\begin{aligned} C &= A * B \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 1,2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 1,2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} \right. \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 1,2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3,4 & 27 \\ 61 & 21 & 17,4 & 45 \end{pmatrix} \right. \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3,4 & 27 \\ 61 & 21 & 17,4 & 45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplikation zweier Matrizen

Man multipliziert eine (l,m)-Matrix A **von links** mit einer (m,n)-Matrix B, indem man die (l,n)-Matrix C so bildet, daß in Spalte i und Zeile j das Produkt aus dem i-ten Spaltenvektor von B mit dem j-ten Zeilenvektor von A steht.

Bemerkungen:

1. Das Produkt A*B läßt sich nur berechnen, wenn die **Spaltenzahl** (= Länge der Zeilenvektoren) von A und die **Zeilenzahl** (= Länge der Spaltenvektoren) von B übereinstimmen.
2. Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h. im allgemeinen ist A*B ≠ B*A !

Beispiel

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} B_{(3,2)} \right. \\ \hline \end{array} \\ A_{(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 7 & 26 \\ 10 & 32 \end{pmatrix} C_{(2,2)} \right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} A_{(2,3)} \right. \\ \hline \end{array} \\ B_{(3,2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 10 & 22 & 34 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} D_{(3,3)} \right. \end{array}$$

$$A_{(2,3)} * B_{(3,2)} = C_{(2,2)} \qquad B_{(3,2)} * A_{(2,3)} = D_{(3,3)}$$

Übungen: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 4 und 5
Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 4 - 6

6.1.7. Regeln für das Rechnen mit Matrizen

Beispiele: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 6 und 7

Rechenregeln für beliebige Matrizen

1. **Assoziativgesetz:** $(A*B)*C = A*(B*C)$
2. **Distributivgesetze von links und von rechts:** $A*(B + C) = A*B + A*C$ und $(A + B)*C = A*C + B*C$.
Voraussetzung ist aber, daß Multiplikation und Addition überhaupt möglich sind, d.h., daß die Formate der Matrizen zusammenpassen!

Beispiele: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 8

Rechenregeln für quadratische Matrizen

3. **Potenzen:** $A^0 := E, A^1 := A, A^{p+1} = A^p * A$
4. **Potenzgesetze:** $A^{p+q} = A^p * A^q$ und $A^{p*q} = (A^p)^q$
5. **Neutrales Element** ist die Einheitsmatrix E: $A*E = E*A = A$

Beispiele: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 9

Rechenregeln für transponierte Matrizen

6. **Addition:** Für zwei Matrizen A und B mit gleichem Format gilt $(A + B)^T = A^T + B^T$
7. **Multiplikation mit reellen Zahlen:** $(r*A)^T = r*A^T$ für $r \in \mathbb{R}$
8. **Multiplikation zweier Matrizen:** Für eine (l,m)-Matrix A und eine (m,n)-Matrix B gilt $(A*B)^T = B^T*A^T$

Der **Satz vom Nullprodukt** gilt nicht für Matrizen, d.h., es existieren Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ mit $A*B = 0$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung: Aufgaben zur Matrizenrechnung Nr. 10