1.6. Aufgaben zur Impulserhaltung

Aufgabe 1: Impuls

a) Ein 1 kg schwerer Wagen prallt **elastisch** mit 1 m/s gegen einen gleich schweren ruhenden zweiten Wagen, so dass er selbst stehen bleibt. Wie schnell rollt der zweite Wagen davon? Begründe mit Hilfe einer Skizze.
b) Ein 1 kg schwerer Wagen prallt **unelastisch** mit 1 m/s gegen einen gleich schweren ruhenden zweiten Wagen, so dass er sich an diesen ankuppelt und beide zusammen weiter rollen. Wie schnell rollen die beiden Wagen davon? Begründe mit Hilfe einer Skizze.
c) Ein 1 kg schwerer Wagen prallt **unelastisch** mit 1 m/s gegen zwei gleich schwere ruhende, gekuppelte Wagen, so dass er sich an die beiden ankuppelt und alle drei zusammen weiter rollen. Wie schnell rollen die drei Wagen davon? Begründe mit Hilfe einer Skizze.
d) Der 1 kg schwere Wagen prallt **unelastisch** mit 1 m/s auf den 2 kg schweren Wagen 2, der ihm mit 0,5 m/s entgegen kommt, so dass beide anschließend gekuppelt sind. Wie verhalten sich die beiden Wagen anschließend? Begründe mit Hilfe einer Skizze.
e) Der 1 kg schwere Wagen prallt **elastisch** mit 1 m/s auf den 2 kg schweren Wagen 2, der ihm mit 0,5 m/s entgegen kommt. Wie schnell und in welche Richtung rollen die beiden Wagen davon? Begründe mit Hilfe einer Skizze und einer **Unmkehrbarkeitsüberlegung**.
f) Eine 100 g schwere Billiardkugel prallt mit 30 cm/s senkrecht gegen die Bande eines 100 kg schweren Billiardtisches. Mit welcher Geschwindigkeit rollt sie wieder weg? Welchen Impuls überträgt sie auf die Bande? Wie „schnell“ wird der Billiardtisch infolge des Aufpralls? Warum sollen Billiardtische möglichst schwer sein? Begründe mit Hilfe einer Skizze und einer **Umkehrbarkeitsüberlegung**.
g) Eine Billiardkugel prallt mit 60 cm/s im Winkel von 30° gegen die Bande. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung rollt sie wieder weg? Begründe mit Hilfe einer Skizze. Betrachte die Impulsübertragung **parallel** zur Bande und **orthogonal** zur Bande.

Aufgabe 2: Kraftstoß

a) Berechne alle auftretenden Kräfte in Aufgabe 1, wenn die Stoßvorgänge eine Dauer von genau 0,1 s haben.
b) Wie schnell wird ein 2000 t schwerer Güterzug, wenn die Lok eine Minute lang mit 1000 kN zieht?
c) Welche Kraft muss ein Motor haben, wenn das 2 t schwere Auto in 5 Sekunden von 0 auf 108 km/h beschleunigen soll?
d) Wie lange muss Karl mit 100 N das 50 kg schwere Kettcar mit seinem Bruder anschieben, damit er 36 km/h erreicht?
e) Wie schnell wird ein Klippenspringer nach 2 Sekunden Flugzeit, wenn er der Erdanziehungskraft $F_g = m \cdot g$ mit $g \approx 10$ N/kg ausgesetzt ist? Wie kann er die Gefahr ernsthafter innerer Verletzungen beim Aufprall verringern?
f) Wie lange muss das 30 Tonnen schwere Flugzeug beschleunigen, um auf 720 km/h zu kommen, wenn das Triebwerk eine Schubkraft von 150 kN entwickelt?
g) Viele Renn- und U-Boote benutzen aus verschiedenen Gründen (welchen?) einen „Pumpjet“ als Antrieb. Die Antriebsschraube wird dabei einfach in ein Rohr gelegt, so dass am Ende des Rohrs ein mehr oder weniger gerade nach hinten gerichteter Wasserstrahl austritt. Welche Schubkraft erzeugt ein Pumpjet, der 200 kg Wasser pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s ausstößt?

Aufgabe 3: Beschleunigungsweg

a) Berechne die Beschleunigungswege für alle Teile der Aufgabe 2.
b) Wie schnell trifft man nach einem Sprung vom Zehnmeterturm auf die Wasseroberfläche?
c) Wie schnell wird der 500 t schwere ICE am Ende des 600 m langen Bahnsteigs, wenn er mit 400 kN beschleunigt?
d) Aus einem 5 kg schweren Gewehr wird ein 30 g schweres Geschoss mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s abgeschossen. Mit welcher Kraft muss der Schütze das Gewehr abstützen, wenn man für den Beschleunigungsvorgang eine Dauer von 1 ms rechnet? Wie lang muss der Gewehrlauf sein?
e) Ein 200 g schwerer Hammer trifft mit 5 m/s auf einen Nagel, der im Holz eine Kraft von 1000 N zur Fortbewegung überwinden muss. Wie lange dauert es, bis der Hammer zur Ruhe kommt und wie tief sitzt der Nagel anschließend im Holz?
f) Eine 5 g schwere Kugel wird aus einer Pistole mit 400 m/s in einen Holzblock geschossen, wo sie nach $2 \cdot 10^{-4}$ s zum Stillstand kommt. Wie groß war die durchschnittliche Bremskraft auf die Kugel im Holz und wie tief dringt die Kugel in das Holz ein?

Aufgabe 4: Der zentrale Stoß
Vervollständige die Tabelle für zwei Wagen mit den Massen m_1 = 300 g und m_2 = 500 g. Alle Angaben sind in m/s.

$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	Stoß	$\vec{v}_1\,'$	$\vec{v}_2\,'$	E_{kin}	E_{kin}‘	Verlust in %
2	−1	elastisch					
2	−1	teilelastisch mit 30% Energieverlust					30
2	−1	unelastisch					
4	2	elastisch					
4	2	teilelastisch mit 10% Energieverlust					10
4	2	unelastisch					

Aufgabe 5: Der nicht zentrale Stoß
Ein 5 cm dicker Tischtennisball trifft vollelastisch und reibungsfrei (!) um x = 1 cm versetzt mit 2 m/s auf einen zweiten ruhenden Tischtennisball.

a) Zeige, dass die Geschwindigkeitsvektoren der Bälle nach dem Stoß mit dem ursprünglichen Geschwindigkeitsvektor des ersten Balls ein geschlossenes Dreieck bilden und dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
b) In welcher Geschwindigkeit prallen die beiden Bälle auseinander und wie groß ist jeweils der Ablenkungswinkel zur ursprünglichen Bewegungsrichtung des ersten Balls?

Aufgabe 6: Der nicht zentrale Stoß
Ein Tennisball trifft mit 10 m/s auf einen zweiten ruhenden Tennisball, so dass beide nach rechts und links im gleichen Winkel von 30° auseinander rollen.

a) Zeige, dass die Geschwindigkeitsvektoren der Bälle nach dem Stoß mit dem ursprünglichen Geschwindigkeitsvektor des ersten Balls ein geschlossenes Dreieck bilden.
b) Berechne die Geschwindigkeiten der beiden Bälle nach dem Stoß
c) Berechne den prozentualen Energieverlust bezogen auf die kinetische Energie des auftreffenden Balls.

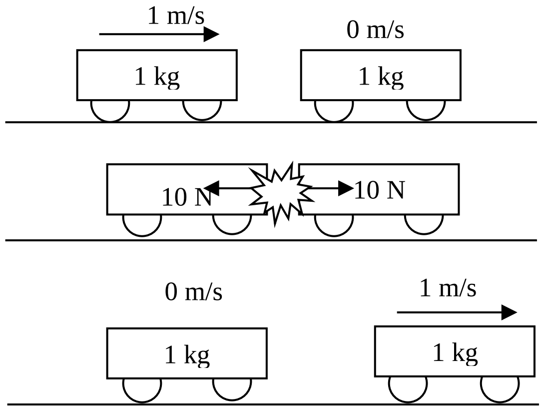
Aufgabe 7: Impulserhaltung in Vielteilchensystemen
Nenne drei Beispiele für Systeme aus vielen Körpern, die aufeinander (z.B. durch Kollisionen, aber auch elektrische oder Gravitationskräfte) Kräfte ausüben ohne die geradlinig gleichförmige Bewegung des Gesamtsystems zu stören, weil sich die einzelnen Kraftstöße und dadurch bewirkten Bewegungsänderungen der einzelnen Körper insgesamt ausgleichen.

1.6. Lösungen zu den Aufgaben zur Impulserhaltung

Aufgabe 1: Impuls

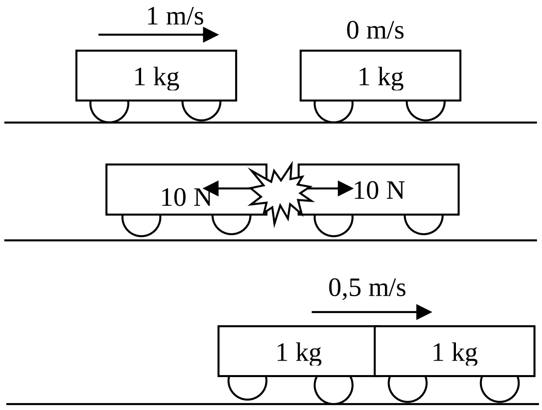
a) Der Impuls $p = m \cdot v = 1\ kg \cdot s = 1\ Ns$ überträgt sich vollständig auf den **zweiten** Wagen, der bei gleicher Masse m dann auch die gleiche Geschwindigkeit von 1 m/s erhält.

Zu **Aufgabe 2**:
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt eine Kraft von $F = p/t = 10\ N$.



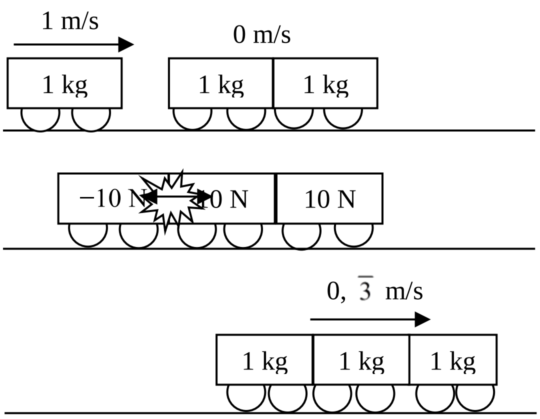
b) Der Impuls $p = m \cdot v = 1\ Ns$ überträgt sich auf **beide** Wagen, die bei doppelter Masse m dann die **halbe** Geschwindigkeit von 0,5 m/s erhalten.

Zu **Aufgabe 2:**
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt eine Kraft von $F = p/t = 10\ N$.



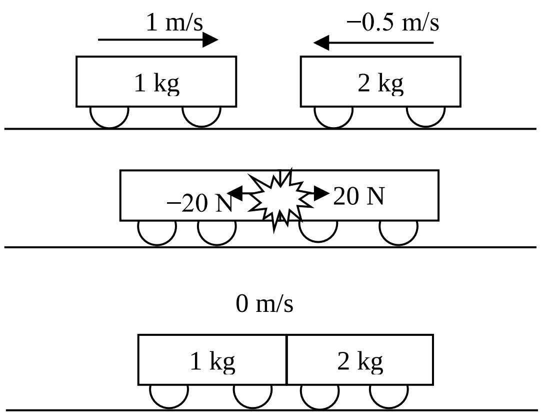
c) Der Impuls $p = m \cdot v = 1\ Ns$ überträgt sich auf alle **drei** Wagen, die bei dreifacher Masse m dann dem **dritten Teil** der Geschwindigkeit von $0,\overline{3}$ m/s erhalten.

Zu **Aufgabe 2**:
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt eine Kraft von $F = p/t = 10\ N$.

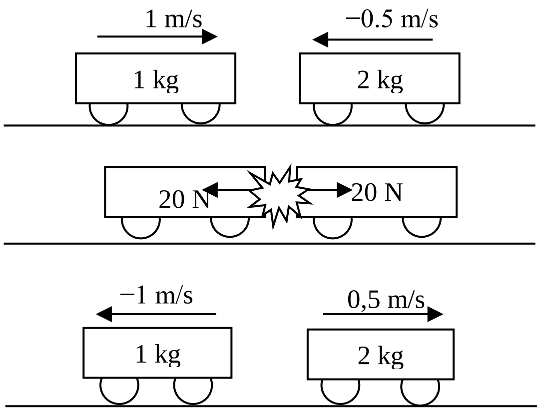


d) Beide Wagen haben den gleichen Impulsbetrag $p = m \cdot v = 1\ Ns$. Da die beiden Impulse entgegengerichtet sind, addieren sie sich zum Gesamtimpuls $p_{ges} = 1kg \cdot 1\ m/s - 0,5\ kg \cdot 2\ m/s = 0$. Wenn beide Wagen verbunden sind und sich nur in eine gemeinsame Richtung bewegen können, muss bei dem Gesamtimpuls $1,5\ kg \cdot v = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ sein. Sie bleiben also einfach stehen!

Zu **Aufgabe 2**:
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt eine Kraft von $F = 2p/t = 20\ N$.

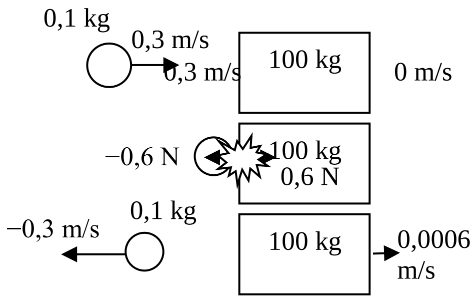


e) Trennen sich die Wagen aus Teil d) anschließend, gibt es unendlich viele Möglichkeiten, den Kollisionsort mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten und verschwindendem Gesamtimpuls zu verlassen, solange Wagen 2 doppelt so schnell ist wie Wagen 1. Aus Symmetriebetrachtung bzw. der Umkehrbarkeit des Vorgangs kann man aber darauf schließen, dass sie sich mit genau den gleiche Geschwindigkeiten von 1 m/s bzw. 0,5 m/s wieder trennen. Diese Überlegung der **Umkehrbarkeit aller Vorgänge** ist die Grundlage des **Energieerhaltungssatzes**, mit dem sich diese Vermutung auch exakt belegen lässt.
Zu **Aufgabe 2**:
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt diesmal eine Kraft von F = 2p/t = 20 N, weil der Impuls p seine Richtung von +p nach –p umkehrt, so dass die Impulsänderung 2·p beträgt!



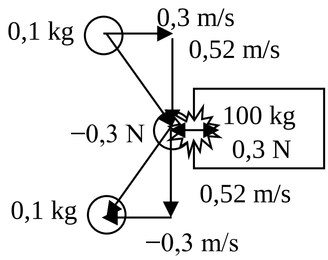
f) Aus der gleichen Symmetriebetrachtung bzw. Umkehrbarkeit wie in Teil e) kann man schließen, dass die Kugel mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit abprallt. Das entspricht der Energieerhaltung, aber zunächst nicht der Impulserhaltung: Die Kugel überträgt einen Impuls von 2·0,1 kg·0,3 m/s = 0,06 Ns auf die Bande bzw. den Billiardtisch. Dieser muss möglichst schwer sein, so dass der übertragene Impuls zu einer minimalen Erschütterung führt.

Zu Aufgabe 2:
Bei einer Wirkungsdauer von 0,1 s wirkt eine Kraft von F = 2·p/t = 0,6 N.



g) Wenn man die Bewegung der Kugel in zwei Komponenten parallel und senkrecht zur Bande zerlegt, erkennt man, dass die parallele Komponente unverändert bleibt, weil die Wand keine Kraft in diese Richtung überträgt. Die senkrechte Komponente wird wie in Teil f) betrachtet. Das Ergebnis ist eine symmetrische Reflektion wie bei einem Spiegel mit Einfallswinkel = Ausfallswinkel und unverändertem Betrag der Geschwindigkeit.

Zu **Aufgabe 2**:
Wenn die Kugel im Winkel von 30° auf die Band trifft, beträgt der senkrechte Komponente des Impulses $p_{senkrecht}$ = p·sin(30°) = 0,5·p = 0,015 Ns und der übertragene Impuls ist infolge der Richtungsumkehr das Doppelte davon, also $2p_{senkrecht}$ = 0,03 Ns, so dass die auf die Bande während 0,1 s wirkende Kraft $F = 2p_{senkrecht}/t$ = 0,3 N beträgt.



Aufgabe 2: Kraftstoß

a) Siehe Aufgabe 1.

b) m·v = F·t ⇒ die erreichte Geschwindigkeit ist $v = \frac{F\cdot t}{m} = \frac{1000000\,\mathrm{N}\cdot 60\,\mathrm{s}}{2000000\,\mathrm{kg}} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t = \frac{1}{2}\cdot 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 60\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{m}$.

c) m·v = F·t ⇒ die benötigte Kraft ist $F = \frac{m\cdot v}{t} = \frac{2000\,\mathrm{kg}\cdot 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5\,\mathrm{s}} = 12\,\mathrm{kN}$.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t = \frac{1}{2}\cdot 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 5\,\mathrm{s} = 75\,\mathrm{m}$

d) m·v = F·t ⇒ die benötigte Zeit ist $t = \frac{m\cdot v}{F} = \frac{50\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{N}} = 5\,\mathrm{s}$.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t = \frac{1}{2}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 5\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{m}$

e) m·v = F·t ⇒ die erreichte Geschwindigkeit ist $v = \frac{F\cdot t}{m} = \frac{m\cdot g\cdot t}{m} = g\cdot t = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 2\,\mathrm{s} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot t = \frac{1}{2}\cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{m}$

f) $m \cdot v = F \cdot t \Rightarrow$ die benötigte Zeit ist $t = \frac{m \cdot v}{F} = \frac{30\,000\,\text{kg} \cdot 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{150\,000\,\text{N}} = 40$ s.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40\,\text{s} = 4$ km.

g) Die Schubkraft ist $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t} = 8$ kN.

Zu **Aufgabe 3**: Der Beschleunigungsweg ist $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 40\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\,\text{s} = 20$ m.

Aufgabe 3: Beschleunigungsweg

a) Siehe Aufgabe 2.

b) Aus $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$ und $v = g \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{v}{g}$ erhält man durch Einsetzen $s = \frac{v^2}{2g}$ · Die erreichte Geschwindigkeit ist $v = \sqrt{2 \cdot s \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 10\,\text{m} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \sqrt{200}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 14{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) Aus $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$ und $m \cdot v = F \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{m \cdot v}{F}$ erhält man durch Einsetzen $s = \frac{m \cdot v^2}{2F}$ · Die erreichte Geschwindigkeit ist $v = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot F}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600\,\text{m} \cdot 400\,000\,\text{N}}{500\,000\,\text{kg}}} = \sqrt{150}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 12{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 44\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

d) Die Kraft ist $F = \frac{m \cdot v}{\Delta t} = 15$ kN und der Gewehrlauf muss mindestens $s = \frac{1}{2} v \cdot t = 25$ cm lang sein.

e) Er kommt in der Zeit $\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{mv}{F} = 1$ ms zur Ruhe und treibt den Nagel dabei um die Strecke $s = \frac{1}{2} v \cdot t = 2{,}5$ mm tiefer in das Holz.

f) Die Bremskraft war $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t} = 10$ kN und die Kugel dringt $s = \frac{1}{2} v \cdot t = 4$ cm tief in das Holz ein

Aufgabe 4: Der zentrale Stoß

$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	Stoß	$\vec{v}_1\,'$	$\vec{v}_2\,'$	E_{kin}	E_{kin}‘	Verlust in %
2	−1	elastisch	−1,75	1,25	0,85	0,85	0
2	−1	teilelastisch mit 30% Energieverlust	1,69	−0,81	0.85	0,595	30
2	−1	unelastisch	0,125	0,125	0,85	0,01	99,26
4	2	elastisch	1,5	3,5	3,4	3,40	0
4	2	teilelastisch mit 10% Energieverlust	3,13	2,52	3,4	3,06	10
4	2	unelastisch	2,75	2,75	3,4	3,03	11,03

Aufgabe 5: Der nicht zentrale Stoß

a) siehe Skript

b) Der zweite Ball wird nur leicht abgelenkt um $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x}{d}\right) \approx 11{,}5°$ und rollt mit $v_2' = v_1 \cdot \cos(\alpha) = 1{,}96$ m/s weiter.

Der erste Ball wird leicht zur Seite geschleudert mit $\beta = 90° - \alpha \approx 78{,}5°$ und rollt mit $v_1' = v_1 \cdot \sin(\alpha) = 0{,}4$ m/s davon.

Aufgabe 6: Der nicht zentrale Stoß

a) siehe Skript

b) Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe $\frac{v_1}{2}$. Ihr Betrag ist also $v_1' = v_2' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \approx 5{,}77$ m/s

c) Der prozentuale Verlust ist $\frac{E_{kin} - E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{E_{kin}'}{E_{kin}} = 1 - \frac{v_1'^2 + v_2'^2}{v_1^2} = \frac{1}{3} = 33{,}\bar{3}$ %.

Aufgabe 7: Impulserhaltung bei Vielteilchensystemen

1. Staub- und Nebelwolken: Die einzelnen Teilchen stoßen ständig aneinander und ändern ihre Bewegungsrichtung aber insgesamt gleicht sich Alles aus und die Wolke behält ihren Kurs bei
2. Sonnensystem: Die Gravitationskräfte zwischen der Sonne und den Planeten zwingt die Planeten auf Ellipsenbahnen um die viel schwerere Sonne, die sich nur kaum wahrnehmbar bewegt. Insgesamt gleichen sich diese Kräfte aus und das Sonnensystem als Ganzes bewegt sich nahezu geradlinig gleichförmig.
3. Milchstraße: wie oben aber anstelle der Planeten treten Sternensysteme. Ein Zentralgestirn fehlt; der Zusammenhalt wird ebenso wie die Zusammenballung zu Spiralarmen durch die gegenseitige Anziehung der Sterne bewirkt!
4. Atome und Moleküle: Die einzelnen Protonen und Elektronen üben elektrische Kräfte aufeinander aus und zwingen sich gegenseitig auf geschlossenen Bahnen. Wegen der Impulserhaltung ist die Bewegung der viel schwereren Protonen im Zentrum kaum wahrzunehmen und die Elektronen bewegen sich auf ausgedehnten Bahnen (Atom- bzw. Molekülorbitale) teilweise über das ganze Molekül hinweg.