

4.1. Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: ungedämpfte Federschwingung

Berechne die Federkonstante D und die Schwingungsdauer T für eine Feder, die durch einen angehängten Körper der Masse $m = 20 \text{ g}$ um $\Delta s = 10 \text{ cm}$ verlängert wird. Rechne mit $g = 10 \text{ m/s}^2$

Aufgabe 2: ungedämpfte Federschwingung

Steigert man die an eine Feder gehängte Masse von 300 g auf 500 g , so verlängert sie sich um 8 cm . Berechne die Schwingungsdauer für einen 1 kg schweren Körper.

Aufgabe 3: ungedämpfte Federschwingung

Welche Masse muss an eine Feder mit $D = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ gehängt werden, damit sie mit der Periodendauer $T = \frac{\pi}{2}$ schwingt?

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung

Ein 300 g schwerer Körper schwingt an einer Schraubenfeder mit der Amplitude $x_0 = 12 \text{ cm}$ und der Periodendauer $T = \frac{\pi}{2} \text{ s}$.

- Berechne die Federkonstante D der Feder.
- Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
- Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung

Ein 50 g schwerer Körper wird an einer Schraubenfeder mit $D = 6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ um 10 cm aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und dann losgelassen.

- Berechne die für die Auslenkung notwendige Kraft und die Schwingungsdauer.
- Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
- Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 6: gedämpfte Federschwingung

Ein 100 g schwerer Körper an einer Feder mit $D = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ und Reibungsfaktor $k = 0,02 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ wird um $x_0 = 10 \text{ cm}$ ausgelenkt und losgelassen.

- Berechne die Periodendauer T und die Halbwertszeit $t_{1/2}$ der Schwingung.
- Nach wie vielen Schwingungen hat sich die Auslenkung halbiert?
- Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim ersten Durchgang durch die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 7: gedämpfte Federschwingung

Ein 200 g schwerer Körper schwingt an einer Feder mit der Periodendauer $T = 1 \text{ s}$ und der Halbwertszeit $t_{1/2} = 5 \text{ s}$. Berechne die Federkonstante D und den Reibungsfaktor k der Feder.

Aufgabe 8: ungedämpftes Pendel

Bestimme die Schwingungsdauer T und die Anzahl der Schwingungen pro Minute, die eine kleine schwere Kugel an einem 5 m langen Faden im Schwerfeld der Erde mit $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ausführt.

Aufgabe 9: ungedämpftes Pendel

An einem Ort herrschte die Gravitationsfeldstärke $g = 9,82 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- Welche Länge l_1 muss ein Pendel haben, das an diesem Ort in zwei Sekunden eine Schwingung ausführt?
- Welche Länge l_2 muss es haben, wenn die Schwingungsdauer $T_2 = 1 \text{ s}$ betragen soll?

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel

Zur Bestimmung der Gravitationsfeldstärke bzw. der Masse des Mondes wird die Schwingungsdauer $T_1 = 3 \text{ s}$ eines Fadenpendels bestimmt. Nach Verlängerung um $\Delta l = 1,11 \text{ m}$ verdoppelt sich die Schwingungsdauer auf $T_2 = 6 \text{ s}$. Wie lang waren die beiden Pendel und wie groß ist die Gravitationsfeldstärke auf dem Mond?

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel

Je weiter man eine Pendel aus seiner Ruhelage auslenkt, desto stärker weicht die tatsächliche Periodendauer von dem Wert $T =$

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ ab.}$$

- Wie groß ist die Komponente F_{Rx} der Rückstellkraft $F_R = F_G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$, die genau in x -Richtung wirkt?
- Bestimme den Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} F_{Rx}$, wenn das Pendel bis zur waagrechten ausgelenkt wird.
- Wird die tatsächliche Periodendauer bei großen Auslenkungen größer oder kleiner als der berechnete Wert?

Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel

Beim Galileischen Rückhaltependel wird eine Stativstange so angebracht, dass das Pendel auf der linken Seite $l_1 = 250$ cm, auf der rechten Seite aber nur noch $l_2 = 160$ cm zu Verfügung hat.

- a) Das Pendel wird so ausgelenkt, dass es links die Höhe h über der Ruhelage erreicht. Welche Höhe erreicht es dann auf der rechten Seite? Begründe.
b) Berechne die mittlere Periodendauer des Pendels für $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel

In ein U-Rohr mit dem konstanten Querschnitt $A = 6,5 \text{ cm}^2$ werden $V = 400 \text{ cm}^3$ Wasser gefüllt und durch Schwenken in eine Schwingung versetzt. Zeige, dass der Flüssigkeitsstand der Wassersäule sich durch $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ beschreiben lässt und bestimme die Periodendauer T .

Aufgabe 14: Schwingkreis

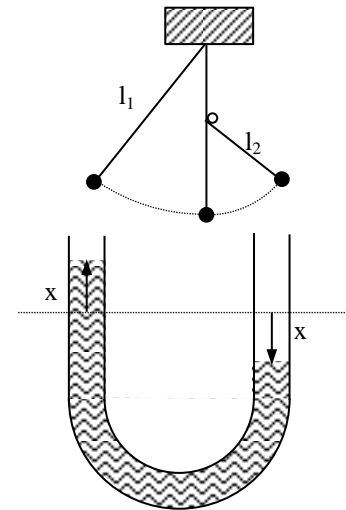
Welche Eigenfrequenz f_0 hat ein Schwingkreis aus einem Kondensator der Kapazität $C = 200 \text{ pF}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 10 \text{ }\mu\text{H}$?

Aufgabe 15: Schwingkreis

Ein Antennenschwingkreis besteht aus einer Spule mit $L = 800 \text{ }\mu\text{H}$ und einem stufenlos regelbaren „Trimmerkondensator“, der in Verbindung mit der Antenne Kapazitäten von 2 bis 50 pF erreicht. Welcher Frequenzbereich kann mit diesem Sender abgedeckt werden?

Aufgabe 16: Schwingkreis

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C sowie einem zweiten „Trimmerkondensator“, der parallel zum ersten Kondensator geschaltet ist und dessen Kapazität zwischen 10 pF und 100 pF stufenlos eingestellt werden kann. Welche Werte müssen L und C haben, damit man mit diesem Schwingkreis Frequenzen zwischen $f_1 = 300 \text{ kHz}$ und $f_2 = 100 \text{ kHz}$ erzeugen kann?



4.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: ungedämpfte Federschwingung

$$D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{mg}{\Delta s} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{5} \text{ s} \approx 0,63 \text{ s}$$

Aufgabe 2: ungedämpfte Federschwingung

$$D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} \approx 1,26 \text{ s}$$

Aufgabe 3: ungedämpfte Federschwingung

$$m = \frac{D \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{5}{8} = 0,625 \text{ s}$$

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung

$$\text{a) } D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} = 4,8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\text{b) } v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow v(0) = 0 \quad \text{und} \quad v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = -0,48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{oder mit Energieerhaltung: } E_{\text{kin}}\left(\frac{T}{4}\right) = E_{\text{pot}}(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} D x_0^2 \Rightarrow v = \pm x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

$$\text{c) } a(t) = \dot{v}(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow a(0) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = -1,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$$

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung

$$\text{a) } \Delta F = D \cdot \Delta s = 0,6 \text{ N} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0,57 \text{ s}$$

$$\text{b) } v(0) = 0 \quad \text{und} \quad v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = -1,10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{oder mit Energieerhaltung.}$$

$$\text{c) } a(0) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = -x_0 \cdot \frac{D}{m} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$$

Aufgabe 6: gedämpfte Federschwingung

$$\text{a) Dämpfungsfaktor } \delta = -\frac{k}{2m} = 0,1 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \text{Halbwertszeit } t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} \approx 6,9 \text{ s}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \approx 10 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \text{Periodendauer } T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0,63 \text{ s.}$$

$$\text{b) Die Auslenkung halbiert sich nach } \frac{t_{1/2}}{T} \approx 11 \text{ Schwingungen.}$$

$$\text{c) Mit der Ketten- und Produktregel erhält man } v(t) = \dot{x}(t) = (x_0 \cdot e^{\delta t} \cdot \cos(\omega t))' = x_0 \cdot e^{\delta t} \cdot [\delta \cdot \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot e^{\frac{\delta T}{4}} \cdot \omega \approx -x_0 \cdot \omega \approx -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Aufgabe 7: gedämpfte Federschwingung

$$\text{Dämpfungsfaktor } \delta = \frac{\ln(2)}{-t_{1/2}} \approx -0,138 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \text{Reibungsfaktor } k = -2 \cdot m \cdot \delta \approx 0,055 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ s}^{-1}. \text{ Aus } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2} \text{ folgt } D = m(\omega^2 + \delta^2) \approx 7,9 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Aufgabe 8: ungedämpftes Pendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 4,44 \text{ s} \Rightarrow 13,5 \text{ Schwingungen pro Minute.}$$

Aufgabe 9: ungedämpftes Pendel

a) $l_1 = \frac{T_1^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0,995 \text{ m}$

b) $l_2 = \frac{T_2^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0,249 \text{ m}$

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel

Aus $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$ erhält man durch Division $\frac{l_2}{l_1} = \frac{T_2^2}{T_1^2} = 4$. Das erste Pendel war also $l_1 = \frac{1}{3} \Delta l = 0,37 \text{ m}$ lang

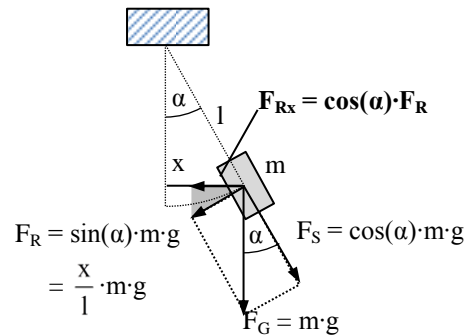
und das zweite $l_2 = \frac{4}{3} \Delta l = 1,48 \text{ m}$. Die Gravitationsfeldstärke ist $g = \frac{4\pi^2 \cdot l_2}{T_2^2} \approx 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel

a) $F_{Rx} = \cos(\alpha) \cdot F_R = \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot mg$ (siehe Zeichnung)

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} F_{Rx} = 0$, da $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \cos(\alpha) = \cos(90^\circ) = 0$

c) Da die Rückstellkraft mit zunehmendem α verschwindet, verharrt das Pendel in Wirklichkeit länger bei großen Auslenkungen und die Periodendauer ist länger



Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel

a) Aufgrund der Erhaltung der potentiellen Energie $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ erreicht das Pendel rechts die gleiche Höhe wie links.

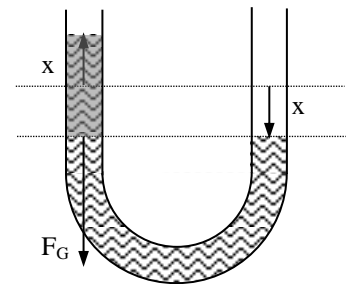
b) Die Periodendauern sind links $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und rechts $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$

Rechts kommt das Pendel schneller wieder zurück, weil es einen kürzeren Weg mit der gleichen mittleren Geschwindigkeit

zurücklegt. Die mittlere Periodendauer ist also $\frac{T_1 + T_2}{2} \approx 0,9 \text{ s}^{-1}$.

Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel

Bei einer Auslenkung des Flüssigkeitsspiegels um x aus der Ruhelage wirkt als Rückstellkraft die Gravitationskraft $F_G(x) = \Delta m \cdot g$ des überstehenden Teils mit der Masse $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot 2x$ und beschleunigt die Gesamtmasse $m = \rho \cdot V$ in die Gegenrichtung. Mit dem 2. Newtonschen Axiom erhält man $F_G(x) = m \cdot a \Leftrightarrow -\rho \cdot A \cdot 2x(t) \cdot g = \rho \cdot V \cdot \ddot{x}(t) \Leftrightarrow -2A \cdot g \cdot x(t) = V \cdot \ddot{x}(t)$. Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Differentialgleichung $-D \cdot x(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$ der Federschwingung. Man erhält also die entsprechende Lösung $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2A \cdot g}{V}}$ bzw. der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2V}{A \cdot g}} \approx 3,48 \text{ s}$.



Aufgabe 14: Schwingkreis

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 3,56 \text{ MHz}$$

Aufgabe 15: Schwingkreis

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = f_2 = 798 \text{ KHz} \leq f \leq 3,98 \text{ MHz} = f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

Aufgabe 16: Schwingkreis

Die Kapazitäten der beiden parallel geschalteten Kondensatoren addieren sich:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_1)}} = f_1 \text{ und } \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_2)}} = f_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot (C+C_1)} = L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_2^2 \cdot (C+C_2)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{f_1^2 \cdot C_1 - f_2^2 \cdot C_2}{f_1^2 - f_2^2} = 1,25 \text{ pF und } L = 25 \text{ mH}$$