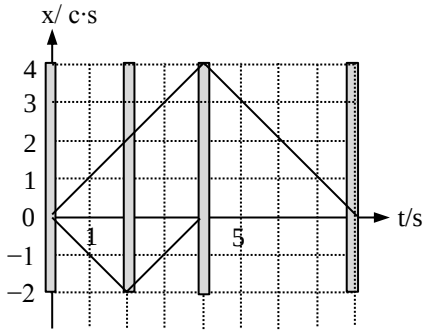
6. Prüfungsaufgaben zur Relativitätstheorie

Aufgabe 1: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich
S stehe in seinem Zug und sendet zur Zeit t = 0 ein Zeitsignal in beide Richtungen aus. Vom hinteren Ende kommt die Antwort nach 4 s, vom vorderen Ende aber erst nach 8 s. Wie lang ist der Zug und wie ist S vom vorderen Ende entfernt? Zeichne das Minkowski-Diagramm zu diesem Vorgang.

Aufgabe 1: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich
S steht 4 Lichtsekunden = 1 200 000 km vom vorderen Ende des 6 Lichtsekunden langen Zuges entfernt:



Aufgabe 2: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich
S‘ fliegt zur Zeit t = t‘ = 0 mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung an S vorbei. S sendet zur Zeit $t_1 = 0$ vom Ursprung $x_1 = 0$ ein Lichtsignal und zur Zeit $t_2 = 5$ s am Ort $x_2 = 1$ Lichtsekunden eine zweites Signal aus. Für S‘ sind beide Signale **am gleichen Ort** ausgesandt worden. Wie groß ist die Geschwindigkeit von S‘?

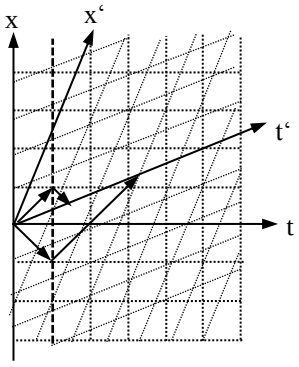
Aufgabe 2: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich

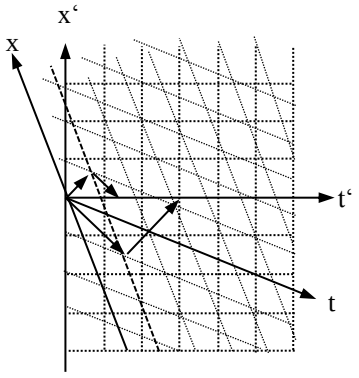
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0{,}2\ c.$

Aufgabe 3: Gleichzeitigkeit
S‘ bewegt sich mit v = 0,4 c in positive x-Richtung und passiert S zur Zeit t = t‘ = 0. Im selben Augenblick sendet S‘ in beide Richtungen eine Funksignal aus, welches **von S ausgesehen** nach 1 Sekunde **gleichzeitig** vor und hinter S‘ reflektiert wird.

a) Formuliere die Ort-Zeit-Funktionen E(t) für S‘ sowie für die beiden reflektierten Lichtstrahlen $L_1(t)$ und $L_2(t)$ **aus der Sicht von S** in Sekunden s bzw. Lichtsekunden c·s.
b) Berechne durch Gleichsetzen der entsprechenden Funktionen aus a), zu welchen Zeiten t_1 und t_2 und an welchen Orten x_1 und x_2 **von S aus gesehen** die reflektierten Signale wieder bei S‘ eintreffen.
c) Zeichne mit diesen Angaben ein Minkowski-Diagramm **aus der Sicht von S**.
d) Zeichne dann das entsprechende Minkowski-Diagramm **aus der Sicht von S‘**.

Aufgabe 3: Gleichzeitigkeit
a) $E(t) = 0{,}4 \cdot t$; $L_1(t) = -t + 2$ und $L_2(t) = t - 2$.
b) L_1 trifft E zur Zeit $t_1 = 0{,}14$ s am Ort $x_1 \approx 0{,}56$ c·s.
L_2 trifft E zur Zeit $t_2 = 3{,}\overline{3}$ s am Ort $x_2 = 1{,}\overline{3}$ c·s.
c) siehe links
d) siehe rechts





Aufgabe 4: Gleichzeitigkeit
S fliegt zur Zeit t = t‘ = 0 mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung an S‘ vorbei. S sendet zur Zeit $t_1 = 0$ vom Ursprung $x_1 = 0$ ein Lichtsignal und zur Zeit $t_2 = 3$ s am Ort $x_2 = 5$ Lichtsekunden eine zweites Signal aus. Für S‘ sind beide Signale **gleichzeitig** ausgesandt worden. Wie groß ist die Geschwindigkeit von S‘?

Aufgabe 4: Gleichzeitigkeit

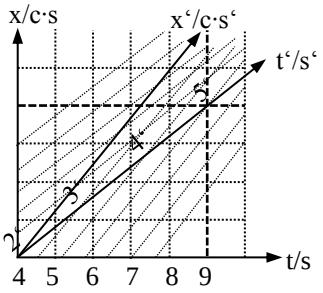
Die Linien gleicher Zeit sind um $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3\ \text{s}}{5\ \text{c}\cdot\text{s}}\right) = \tan^{-1}(0{,}6)$ zur Senkrechten geneigt. Die Linien gleichen Ortes sind um den gleichen Winkel zur Waagrechten geneigt. Die Geschwindigkeit ist also v = 0,6 c.

Aufgabe 5: Zeitdilatation

Die Uhr von S‘ fliegt mit v = 0,8 c an einer Reihe synchronisierter Uhren von S vorbei. Bei t_1‘ = 2 s‘ zeigt die gerade passierte ruhende Uhr t_1 = 4 s. Bei t_2‘ wird eine weitere ruhende Uhr mit t_2 = 9 s passiert. Berechne t_2‘ und zeichne das Minkowski-Diagramm für diesen Vorgang.

Aufgabe 5: Zeitdilatation

$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5\ s \cdot 0{,}6 = 3\ s \Rightarrow t_2' = 5\ s'$.



Aufgabe 6: Zeitdilatation (12)

S‘ bewegt sich mit v = 0,6 c in positive x-Richtung und passiert S zur Zeit t = t‘ = 0. Beantworte die folgenden Fragen jeweils

1. rechnerisch
2. zeichnerisch in einem Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S.
3. zeichnerisch in einem Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S.

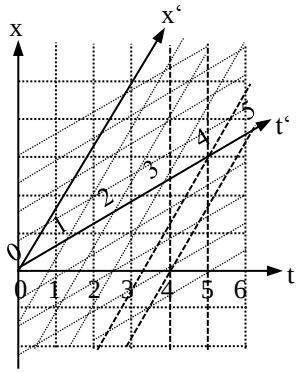
a) Welche Zeit zeigt die Uhr von S‘, wenn gleichzeitig für S in S die Zeit t = 4 s angezeigt wird? (3)
b) Welche Zeit zeigt die Uhr von S, wenn gleichzeitig für S‘ in S‘ die Zeit t‘ = 4 s‘ angezeigt wird? (3)
c) Welche Zeit zeigt die Uhr von S‘, wenn gleichzeitig für S in S die Zeit t = 5 s angezeigt wird? (3)
d) Welche Zeit zeigt die Uhr von S, wenn gleichzeitig für S‘ in S‘ die Zeit t‘ = 5 s‘ angezeigt wird? (3)

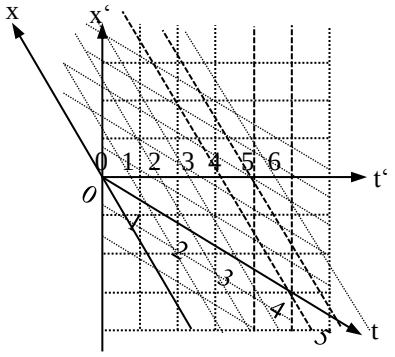
Aufgabe 6: Zeitdilatation

1. Rechnungen: (4) 2. Minkowski-Diagramm von S (4) 3. Minkowski-Diagramm von S‘ (4)

$f = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8$

a) $t' = f \cdot t = 3{,}2\ s'$
b) $t = f \cdot t' = 3{,}2\ s$
c) $t' = \frac{t}{f} = 4\ s'$
d) $t = \frac{t'}{f} = 4\ s$





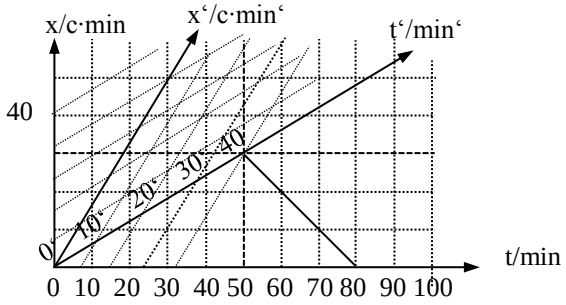
Aufgabe 7: Zeitdilatation

Ein Raumschiff S‘ fliegt mit v = 0,6 c von der Erde weg, die es zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$ passiert hat. Die Uhren des Raumschiffes zeigen $t_2' = 40$ Minuten an, als es eine Raumstation passiert, deren Uhren Erdzeit anzeigen und die relativ zur Erde ruht.

a) Zeichne das Minkowski-Diagramm.
b) Welche Zeit zeigt die Uhr der Raumstation bei dem Treffen an?
c) Wie groß ist die Entfernung x_2 zwischen Erde und Raumstation von diesen aus betrachtet?
d) Die Raumstation meldet das Treffen an die Erde. Wann trifft diese Meldung dort ein?

Aufgabe 7: Zeitdilatation

a) siehe rechts
b) $t_2 = 50$ Minuten
c) $x_2 = v \cdot t_2 = 30$ Lichtminuten
d) $t_3 = t_2 + \frac{x_2}{c} = 80$ Minuten

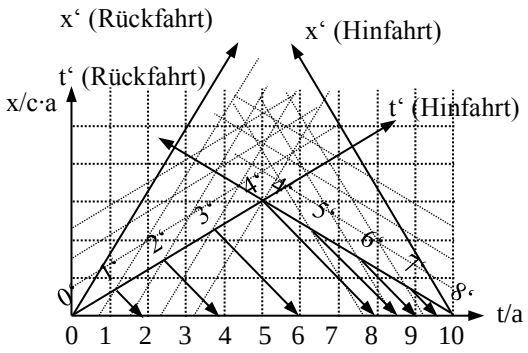


Aufgabe 8: Zwillingsparadoxon

Paul fliegt mit v = 0,6 c zu einem 3 Lichtjahre entfernten Stern, macht schnell ein Erinnerungsfoto und kehrt mit v = −0,6 c wieder zur Erde zurück. Dort hat sein Zwillingsbruder Peter 10 Jahre auf ihn gewartet. Paul hat jedes Jahr seiner Zeitrechnung einen Geburtstagsgruß an Peter geschickt. Zeichne ein Minkowski-Diagramm mit allen Geburtstagsgrüßen und bestimme Pauls Alter bei seiner Rückkehr.

Aufgabe 8: Zwillingsparadoxon

siehe rechts: Paul ist nur um 8 Jahre älter geworden. Da er sein Bezugssystem bei der Umkehr gewechselt hat, sind die Bezugssysteme nicht mehr gleichberechtigt bzw. symmetrisch!



Aufgabe 9: Dopplereffekt (12)

Einem Raumschiff, welches sich mit der konstanten Geschwindigkeit v =0,6·c von der Erde wegbewegt, werden in Jahresabständen (Periode T_0 = 1 a in Erdzeit) Radiosignale hinterhergesandt und von diesem wieder zur Erde zurückgeworfen.

a) In welchen Perioden T_1 kommen die Signale aus der Sicht der Erde bei dem Raumschiff an? (2)
b) In welchen Perioden T_1’ kommen die Signale aus der Sicht des Raumschiffes bei ihm an? (2)
c) In welchen Perioden T_2 kommen die Signale aus der Sicht der Erde wieder auf der Erde an? (2)
d) In welchen Perioden T_2’ kommen die Signale aus der Sicht des Raumschiffes wieder auf der Erde an? (2)
e) Zeichnen Sie ein Ort-Zeit Diagramm mit $0 \le t \le 20$ a und $0 \le s \le 10$ c·a und markieren Sie die Ergebnisse aus a) – d) in diesem Diagramm. Tragen Sie die Jahre aus der Sicht des Raumschiffes maßstabsgetreu auf seiner Ortslinie ein. (4).

Aufgabe 9: Dopplereffekt (12)

a) Ereignisse auf dem Raumschiff von der Erde aus betrachtet.

Nichtrelativistischer Dopplereffekt: $T_1 = \dfrac{T_0}{1-\dfrac{v}{c}} = \dfrac{5}{2}\,a = 2{,}5\ a.$ (2)

b) Ereignisse auf dem Raumschiff vom Raumschiff aus betrachtet.

Relativistischer Dopplereffekt: $T_1' = T_1 \cdot \sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = T_0 \cdot \sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}} = 2\ a.$ (2)

c) Ereignisse auf der Erde von der Erde aus betrachtet.

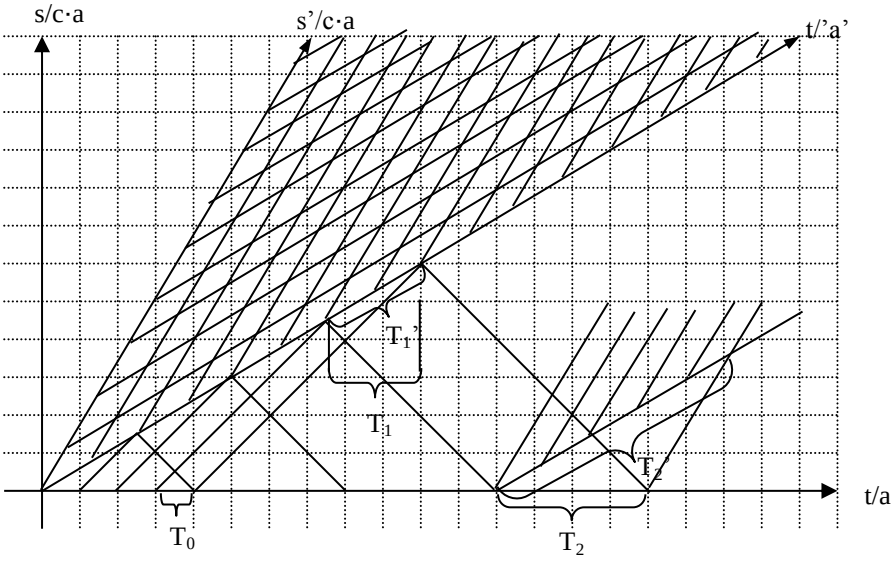
Relativistischer Dopplereffekt vom Raumschiff aus gesehen: $T_2 = T_1' \cdot \sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}} = 4\ a.$

oder zweimal nichtrelativistischer Dopperleffekt von der Erde aus gesehen: $T_2 = T_1 \cdot \left(1+\dfrac{v}{c}\right) = T_0 \cdot \dfrac{c+v}{c-v} = 4a$ (2)

d) Ereignisse auf der Erde vom Raumschiff aus betrachtet.

Nichtrelativistischer Dopplereffekt: $T_2' = \dfrac{T_1'}{1-\dfrac{v}{c}} = \dfrac{T_2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \dfrac{16}{5}\ a = 3{,}2\ a.$ (2)

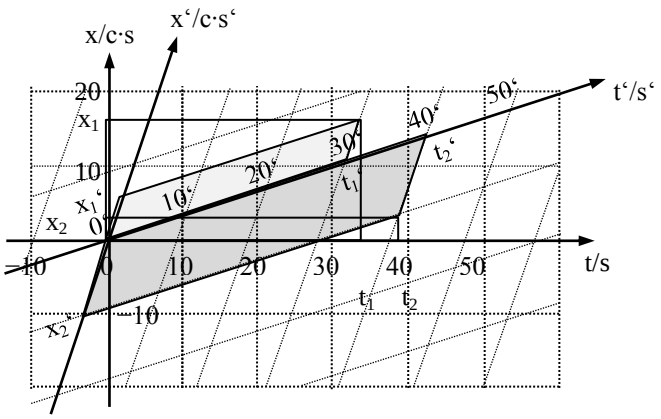
e) Diagramm (4)



Aufgabe 10: Lorentz-Transformationen (12)

S‘ bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0,3 c zum S-System, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit t = t‘ = 0 in Deckung sind. Im S‘-System blitzen die Lampe 1 am Ort $x_1' = 1{,}5\cdot10^6$ km zur Zeit t_1' = 30 s und die Lampe 2 am Ort $x_2' = -3\cdot10^6$ km zur Zeit t_2' = 40 s auf.

a) Berechne die Orte x_1 und x_2 sowie die Zeiten t_1 und t_2 für diese Ereignisse im S-System. (4)
b) Zeichne das Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S. (4)
c) Zeichne das Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S‘. (4)



Aufgabe 10: Lorentz-Transformationen

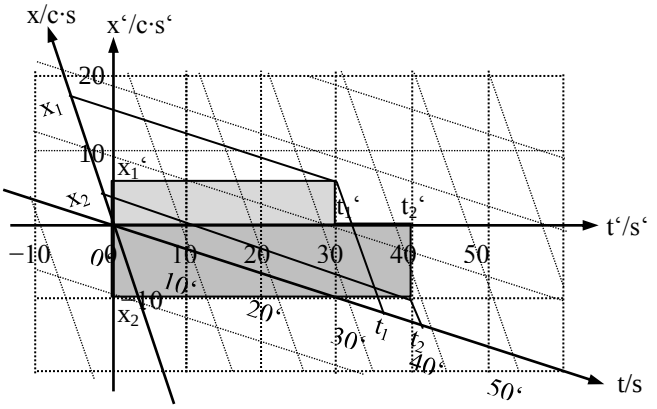
a) $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{0{,}91} \approx 0{,}954;$

mit $x_1' = 5$ c·s‘ und $x_2' = -10$ c·s‘

$\Rightarrow x_1 \approx 14{,}7$ c·s und $x_2 \approx 2{,}1$ c·s (2)

$\Rightarrow t_1 \approx 33{,}0$ s und $t_2 \approx 38{,}8$ s. (2)

b) Minkowski-Diagramm für S: siehe rechts: (4)
c) Minkowski-Diagramm für S‘: siehe rechts: (4)



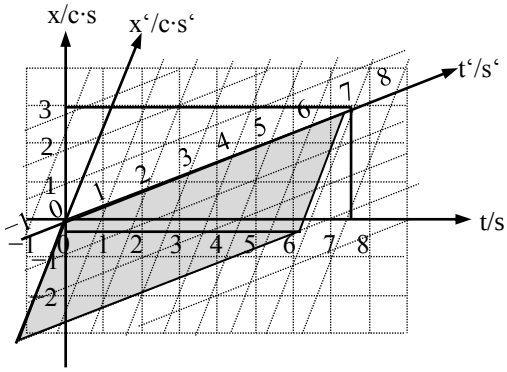
Aufgabe 11: Lorentz-Transformation (15)

Ein 3 Lichtsekunden langer Einstein-Zug passiert mit v = 0,4 c einen ebenfalls 3 Lichtsekunden langen Bahnsteig, wobei die Lok x‘ = 0 zur Zeit t = t’ = 0 als erste vor allen anderen Wagen das **vom Lokführer aus gesehen vordere** Bahnsteigende x = 0 erreicht.

a) Zeichne ein Minkowski-Diagramm aus der Sicht eines am **vorderen** Bahnsteigende bei x = 0 stehenden Beobachters. (3)
b) Zeichne ein Minkowski-Diagramm aus der Sichtdes Lokführers bei x‘ = 0. (3)
c) Welche Zeit t_0 zeigt die Uhr am **hinteren** Bahnsteigende x = 3 c·s an, als die Lok vorbei fährt? (1)
d) Wo befindet sich das Zugende zu dieser Zeit vom Bahnhof aus gesehen? (1)
e) Welche Zeit zeigt die Uhr in der Lok an, als sie das **hintere** Bahnsteigende x = 3 c·s erreicht? (1)
f) Wo befindet sich das Zugende vom Bahnhof aus gesehen, wenn im Zugende die Zeit t_0' = 6,874 s angezeigt wird? (2)
g) Wie groß wäre die kinetische Energie des 200 t schweren Zuges nach klassischer Berechnung? (1)
h) Wie groß ist die kinetische Energie des 200 t schweren Zuges nach relativistischer Berechnung? (2)

Lösungen

a) Diagramm: siehe rechts (3)
b) Diagramm: siehe rechts (3)



c) $t_0 = \frac{x_0}{v} = \frac{3\,c\cdot s}{0{,}4\,c} = 7{,}5$ s (1)

d) $x_1 = x_0 - x_0' = x_0 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot x_0$

$= 3$ s $- 0{,}9165\cdot 3$ s $\approx 0{,}25$ c·s (1)

e) $t_0' = t_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 6{,}87$ s’ (1)

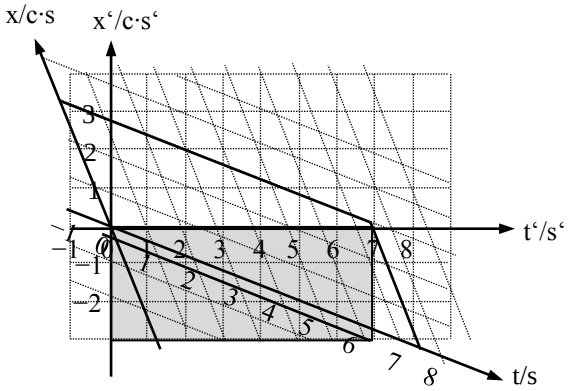
f) $x_2 = \frac{x_0' + v\cdot t_0'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx \frac{-3+0{,}4\cdot 6{,}87}{0{,}9165} \approx -0{,}25$ c·s’ (2)

g) $E_{kin} = \frac{1}{2} m'v^2 = 0{,}08 m'c^2 = 1{,}44 \cdot 10^{21}$ J (1)

mit der Ruhemasse m' = 200 000 kg und v = 0,4 c

h) $E_{kin} = mc^2 - m'c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) m'c^2$

$\approx 0{,}091\ m'c^2 = 1{,}64 \cdot 10^{21}$ J (2)



Aufgabe 12a: Relativistische Energie im Zyklotron

a) Welche Spannung benötigt man, um Elektronen mit der Ruhemasse $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg und der Ladung $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C auf 0,8 c zu beschleunigen?

b) Wie stark muss das Magnetfeld sein, damit sie auf eine Kreisbahn mit einem Radius von 5 cm gelenkt werden?

Lösung:

a) $E_{pot} = E_{kin}' \Leftrightarrow U \cdot Q = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \cdot m_0 c^2 = \frac{2}{3} m_0 c^2 \Rightarrow U \approx 34{,}1$ kV.

b) $F_z = F_L \Leftrightarrow \frac{m_0 v^2}{r \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Q \cdot v \cdot B \Rightarrow B = \frac{5 \cdot m_0 \cdot v}{3 \cdot r \cdot Q} \approx 45{,}5$ mT

Aufgabe 12b: Relativistische Energie im Zyklotron

a) Welche Spannung benötigt man, um Protonen mit der Ruhemasse $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg und der Ladung $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C auf 0,8 c zu beschleunigen?

b) Wie stark muss das Magnetfeld sein, damit sie auf eine Kreisbahn mit einem Radius von 5 m gelenkt werden?

Lösung:

a) $E_{pot} = E_{kin}' \Leftrightarrow U \cdot Q = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \cdot m_0 c^2 = \frac{2}{3} m_0 c^2 \Rightarrow U \approx 6{,}26$ MV.

b) $F_z = F_L \Leftrightarrow \frac{m_0 v^2}{r \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Q \cdot v \cdot B \Rightarrow B = \frac{5 \cdot m_0 \cdot v}{3 \cdot r \cdot Q} \approx 0{,}835$ T

Aufgabe 13: Geschwindigkeitsvergleich und Energie (18)

Der Einstein-Zug S' bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0,6 c zum Bahnhof S, so dass die Lok (x' = 0) zur Zeit t = t' = 0 das vom **Lokführer aus gesehen vordere** Bahnsteigende (x = 0) passiert. Der Lokführer gibt zur genau in diesem Augenblick einen Schuss in **negative** x'-Richtung auf das Zugende ab. Er stellt fest, dass das Geschoss eine Geschwindigkeit von u' = −0,8 c hat und nach Δt' = 3,75 s das Zugende erreicht.

a) Wie lang ist der Zug aus der Sicht des Lokführers? (1)

b) Stelle den Vorgang im Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S dar. (3)

c) Stelle den Vorgang im Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S' dar. (4)

d) Welche Zuglänge s misst S? (1)

e) Welche Laufzeit Δt misst S für das Geschoss? (2)

f) Welche Geschwindigkeit u misst S für das Geschoss? (3)

g) Welche Geschwindigkeit u bezogen auf den Bahnhof würde S nach klassischer Betrachtung aus der Geschwindigkeit v des Zuges und der Relativgeschwindigkeit u' des Geschosses im Zug ableiten? (1)

h) Welche kinetische Energie hat ein Geschoss mit der Ruhemasse von 1 g und einer Geschwindigkeit von 0,8 c nach relativistischer Betrachtung? (2)

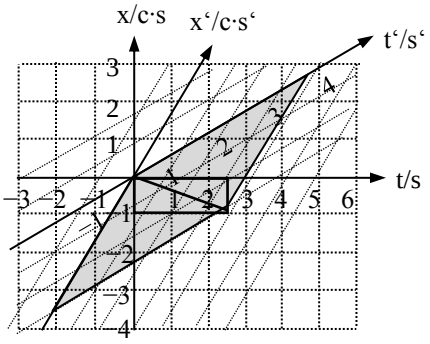
i) Welche kinetische Energie hätte das Geschoss aus h) nach klassischer Rechnung? (1)

Lösungen (18)

a) Für S‘ hat der Zug die Länge $\Delta x' = |v| \cdot \Delta t' = 3$ Lichtsekunden‘. (1)

b) siehe rechts (3)

c) siehe rechts (4)

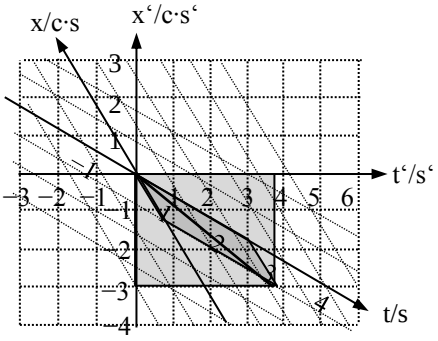


d) $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8 \Rightarrow$ Zuglänge $\Delta x = 0{,}8 \cdot \Delta x' = 2{,}4$ Lichtsekunden (1)

e) Für S ist $\Delta t = t_0 = \frac{t_0' + \frac{v}{c} \cdot \frac{x_0'}{c}}{0{,}8} = \frac{3{,}75 - 0{,}6 \cdot 3}{0{,}8}$ s $\approx 2{,}4375$ s (2)

f) Das Geschoss ist von S‘ aus betrachtet zur Zeit $t_0' = 3{,}75$ s‘ am Ort $x_0' = -3$ c·s‘. Von S aus betrachtet steht die Uhr in diesem Augenblick auf $t_0 = 2{,}4375$ s und das Geschoss ist am Ort

$x_0 = \frac{x_0' + v \cdot t_0'}{0{,}8} = \frac{-3 + 0{,}6 \cdot 3{,}75}{0{,}8}$ c·s $\approx -0{,}9375$ c·s (2)



Für S hat es die Geschwindigkeit $u = \frac{x_0}{t_0} \approx -0{,}38$ c. (1)

g) In klassischer Betrachtung würde man die Geschwindigkeiten von Zug und Geschoss einfach addieren und erhielte 0,6c – 0,8c = −0,2 c für die Geschwindigkeit des Geschosses relativ zum Bahnsteig. (1)

h) $E_{kin} = mc^2 - m'c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) m'c^2 = \frac{1}{4} m'c^2 = 2{,}25 \cdot 10^{13}$ J (2)

mit der Ruhemasse m’ = 1 g und v = 0,6 c.

i) $E_{kin} = \frac{1}{2} m'v^2 = \frac{9}{50} m'c^2 = 1{,}62 \cdot 10^{13}$ J (1)